

MATEMATYKA (ZAKRES ROZSZERZONY)

1. Korzystając z własności wektorów wykaż, że punkty  $A(-4,5)$ ,  $B(4,-1)$ ,  $C(8,4)$  są współliniowe, a punkt  $D(6,-2)$  nie należy do prostej  $AB$ .
2. Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = \frac{2}{|x|-1} \geq |x|$ , a następnie:
  - a. podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$
  - b. wyznacz przedziały monotoniczności funkcji  $g$
  - c. wykaż, że funkcja  $g$  jest parzysta
  - d. rozwiąż nierówność  $\frac{2}{|x|-1} \geq |x|$ ,
3. Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = (|x| - 3)^2 - 4$ .
  - a. Podaj zbiór wartości funkcji  $g$
  - b. Oblicz miejsca zerowe funkcji  $g$
  - c. Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności  $g(x) \geq 0$ .
4. Rozwiąż algebraicznie równanie i nierówność:
  - a.  $|2 - x| = 5 - |x + 3|$
  - b.  $|7 - x| + |x - 1| \leq x + 14$
5. Przeprowadź dyskusję liczby rozwiązań równania ze względu na wartość parametru  $k$ ,  $k \in R$   
 $(3k+2)x=4-9x^2$ ,
6. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ ,  $m \in R$  dla których równanie  $(m+1) \cdot |5-4x| = m^2 - 1$  ma dwa rozwiązania dodatnie.

7. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $k$ ,  $k \in R$ , dla których wykresy funkcji liniowych  $f(x)=2x+2-k$  oraz  $g(x)=-x+2k+2$  przecinają się w punkcie, którego współrzędne  $(x,y)$  spełniają warunek  $x-y < 2k+8$ .
8. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $a$ ,  $a \in R$ , dla których dziedziną funkcji  $y=\sqrt{(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2}$  jest zbiór liczb rzeczywistych  $R$ .
9. Dane jest równanie  $(1-k)x^2+(k-1)x+(k+1)=0$  z niewiadomą  $x$  i parametrem  $k$ ,  $k \in R$ . Napisz wzór funkcji  $f$ , która każdej liczbie rzeczywistej  $k$  przyporządkowuje liczbę rozwiązań tego równania.
10. Rozwiąż algebraicznie i graficznie nierówność  $|x^2-5|x|+2| > 2$ .
11. Dla jakich wartości parametru  $m$  suma dwóch różnych rozwiązań równania  $x^2-2m(x-1)-1=0$  jest nie mniejsza od sumy kwadratów tych rozwiązań?
12. Wykaż, że nierówność  $2x^2+(k+3)x+8 > 0$  jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą  $x$  tylko wtedy, gdy  $k \in (-11,5)$ .
13. W trójkącie prostokątnym najkrótsza wysokość jest równa 15, a najkrótszy bok ma długość 17. Oblicz:
- Długości pozostałych boków trójkąta
  - Promień okręgu opisanego na tym trójkącie
14. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną jest równa 4cm. Spodek tej wysokości leży w odległości  $1\frac{1}{6}$  cm od środka przeciwprostokątnej. Oblicz:
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie

b. długość boków tego trójkąta.

15. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ , jeśli  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{17}$ ,  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

16. Oblicz  $\cos \frac{4\pi}{3} \sin \left(-\frac{7\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{10\pi}{3}$

17. Zbadaj parzystość funkcji  $f(x) = -\sin|x|$ , gdzie  $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$ .

a. Naskicuj wykres funkcji  $f$

b. Odczytaj z wykresu argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartość  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. Rozwiąż dany układ algebraicznie. Następnie przedstaw ilustrację graficzną tego układu:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

19. Punkt wspólny prostych  $k: y=2x+1$  oraz  $m: y=-2x+1$  jest punktem przecięcia się przekątnych prostokąta ABCD. Wiedząc, że przekątne prostokąta mają długość 10 oblicz współrzędne jego wierzchołków.

20. Dane są punkty  $A(-4,0)$ ,  $B(2,-2)$  oraz prosta  $k: x+y-6=0$ . Wyznacz na prostej  $k$  punkt  $C$  tak, aby  $|AC| = |BC|$ .

21. Prosta  $k: y=3-x$  przecina parabolę  $p: y=x^2+6x+9$  w punktach  $A$  i  $B$

a. Oblicz współrzędne punktów  $A$  i  $B$

b. Wykaż, że oś symetrii paraboli przecina odcinek  $AB$  w punkcie, który dzieli ten odcinek w stosunku 3:2.

22. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 26cm. Wysokość AE jest równa 24cm. Oblicz:
- obwód trójkąta ABC
  - długości odcinków, na jakie wysokość CD podzieliła wysokość AE,
  - Stosunek pola trójkąta ADS do pola trójkąta CSE, gdzie S jest punktem wspólnym wysokości AE i CD.
23. Boki trójkąta mają długość: 13cm, 20cm, 21cm. Oblicz:
- pole tego trójkąta
  - sinus największego kąta
  - promień okręgu wpisanego w trójkąt
  - promień okręgu opisanego na trójkącie.
24. Pole wycinka koła jest równe  $40\pi \text{ cm}^2$ , a łuk tego wycinka ma długość  $10\pi \text{ cm}$ . Oblicz:
- promień koła
  - miarę kąta środkowego tego wycinka.
25. Dany jest wielomian  $W(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$
- Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = x^2 - 3x + 1$
  - Zapisz wielomian  $W(x)$  w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego.
26. Wielomian  $W(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - ax + 2$  jest podzielny przez wielomian  $P(x) = x^2 - 3x + b$ . Oblicz a i b.
27. Wykaż, że  $a^4 \leq \frac{1+4a^8}{4}$

28. Wykaż, że  $(x + 3)^3 - (x - 1)^3 \geq 16$  dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ .
29. Dany jest wielomian  $W(x) = (2x - k) \cdot [(k + 3)x^2 - 4x + k]$ , gdzie  $k \neq -3$
- Dla  $k = 0$  podaj pierwiastki wielomianu  $W(x)$  i ustal ich krotność
  - Wyznacz wartość  $k$  tak, aby wielomian  $W(x)$  miał pierwiastek trzykrotny. Jaki to pierwiastek?
30. Funkcja wielomianowa  $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , gdzie  $a \neq 0$ , ma trzy miejsca zerowe:  $-2, 1, 4$ , a dla argumentu  $-1$  przyjmuje wartość  $-10$ .
- wyznacz współczynniki  $a, b, c, d$
  - wyznacz wszystkie argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje tę samą wartość, co funkcja kwadratowa  $y = x^2 + x - 2$ .