

MATEMATYKA (ZAKRES PODSTAWOWY)

1. Dane są punkty: $A(0,-3)$, $B(4,-1)$, $C(5,3)$, $D(-3,-1)$. Korzystając z własności wektorów wykaż, że czworokąt ABCD jest trapezem.
2. Wykres funkcji $f(x)=-2x^2$ przesunięto równolegle o wektor $v^{\vec{}}=[1,4]$ i otrzymano wykres funkcji g. Wykaż, że $g(x)=-2x^2+4x+2$.
3. Naskicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{x}{2}+1$, gdzie $x\in\langle-2,0\rangle\cup\langle0,2\rangle$.
 - a. Podaj wzór funkcji g, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f przez symetrię środkową względem punktu $(0,0)$.
 - b. Na podstawie wykresu funkcji g rozwiaz nierownoc $g(x)\leq-1$.
4. Oblicz wartoc wyrażenia $|2-a|a-4|+1\frac{7}{9}$ dla $a=0,3^{-1}$
5. Rozwiąz algebraicznie równanie i nierownoc:
 - a. $2|x+5|=6$
 - b. $|-x-7|\geq-7$
6. Wyznacz zbiory $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$ wiedząc, że:
A- zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierownoc
$$8-|x+2|>3$$

B- zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierownoc
$$|x-1|-2\geq 0$$
7. Rozwiąz równanie i nierownoc:

$$(x^2 - 3x)^2 = 4(x^2 - 3x)$$

$$7 - 2(x - 2)^2 \geq 5x$$

8. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $y = 2x^2 - 4x + 5$ w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$.
9. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe: -3 i 1 . Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie o rzędnej $-1\frac{1}{2}$.
- Wyznacz wzór funkcji f w postaci iloczynowej, ogólnej i kanonicznej.
 - Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f
 - Jakie miejsca zerowe ma funkcja $y = f(-x) + 1\frac{1}{2}$?
10. Wykaż, że równanie $2x^2 - (k+1)x + 2 = 0$ ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy $k \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$.
11. Suma kwadratów dwóch liczb różniących się o 4 jest równa 400. Wyznacz te liczby.
12. Długości przekątnych rombu wyrażają się liczbami pierwszymi, różniącymi się o 2. Wiedząc, że pole tego rombu jest mniejsze od 17,5, oblicz jego obwód.
13. Ojciec i córka mają razem 100 lat. 15 lat temu iloczyn liczby lat córki i ojca był równy 1029. Ile lat ma obecnie ojciec, a ile córka?
14. W trójkącie prostokątnym najkrótsza wysokość jest równa 15, a najkrótszy bok ma długość 17. Oblicz:
- Długości pozostałych boków trójkąta
 - Promień okręgu opisanego na tym trójkącie
15. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną jest równa 4cm. Spodek tej wysokości leży w odległości $1\frac{1}{6}$ cm od środka przeciwprostokątnej. Oblicz:
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie
 - długość boków tego trójkąta.

16. Wyznacz miarę kąta α , $\alpha \in < 0^\circ, 360^\circ$, wiedząc, że

a. $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$

b. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ i $\sin \alpha > 0$.

17. Wykaż, że dana równość jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

$$(1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \right) = \cos \alpha$$

18. Wykaż, że:

a. $(\sin 15^\circ + \cos 165^\circ)^2 + 2 \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = 1$

b. $(\sin 130^\circ + \cos 50^\circ)^2 - 2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ = 1$

19. Wyznacz równanie prostej:

a. nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 120^\circ$ i przechodzącej przez punkt $P(-\sqrt{6}, \sqrt{8})$

b. równoległej do prostej $k: 2x - 3y + 1 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-17, 2)$

20. Wyznacz równanie prostej :

a. prostopadłej do prostej $k: -x + 5y - 7 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-3, 11)$

b. do której należą punkty $A(-3, 9)$ $B(-3, 12)$

21. Dane są punkty $A(-3, -1)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 7)$, $D(-5, 2)$. Wykaż, że czworokąt ABCD jest równoległobokiem.

22. Boki trójkąta mają długość: 13cm, 20cm, 21cm. Oblicz:

a. pole tego trójkąta

b. sinus największego kąta

c. promień okręgu wpisanego w trójkąt

d. promień okręgu opisanego na trójkącie

23. Pole wycinka koła jest równe 40π cm², a łuk tego wycinka ma długość 10π cm. Oblicz:
- promień koła
 - miarę kąta środkowego tego wycinka.
24. Wielomian $W(x)=a(x^2-1)(x+3)$, gdzie $a \neq 0$, dla liczby 3 przyjmuje wartość 96.
- Oblicz a
 - Wyznacz pierwiastki wielomianu $F(x)=W(x)-10(x+1)$.
25. Rozwiąż równania:
- $(2x-5)^3-8=0$
 - $3x^3-10x^2+9x=2$
26. Wykaż, że wielomian $W(x)=(2x^{10}+3x)^{15}+1$ jest podzielny przez dwumian $(x+1)$ i nie jest podzielny przez dwumian $(x-1)$.
27. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^3+(a^3-2)x^2+2a^2x-a+5$ przez dwumian $x-1$ jest równa 6. Oblicz a .
28. Wielomian $W(x)=2x^3+(b-a)x^2-(3a-b)x+a+2b$ jest podzielny przez dwumian $x-3$, natomiast reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+1$ jest równa 12.
- Oblicz a i b
 - Wyznacz całkowite pierwiastki wielomianu $W(x)$.
29. Sprawdź, czy istnieją liczby a i b , dla których wielomiany $W(x)=x^3+a^2x^2-3x+a$ oraz $F(x)=x^3+4x^2+(a+b)x+b-1$ są równe.
30. Iloczyn kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby o 3 od niej większej jest równy 324. Wyznacz te liczby.